NO: 15-04-16
Date:

Previously on Beligiannis

Έστω G: ομάδα και $H \trianglelefteq G$. Τότε $G/H = \{xH \subseteq G \mid x \in G\}$
$= \{Hx \subseteq G \mid x \in G\}$

είναι ομάδα με πράξη $(xH)(yH) = (xy)H$
η οποία καλείται ομάδα-πηλίκο της G/H

· Βασικές ιδιότητες

① $e_{G/H} = eH = H$ και $(xH)^{-1} = x^{-1}H$

② Αν $x_1H, x_2H, \dots, x_nH$, τότε: $x_1H\, x_2H \dots x_nH = (x_1x_2\dots x_n)H$

Ιδιαίτερα: $(xH)^n = x^nH$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

③ Αν $x \in G$ και $o(x) < \infty$, τότε $o(xH) < \infty$ και $o(xH) \mid o(x)$

Πράγματι, έστω $o(x) = n < \infty$. Τότε: $(xH)^n = x^nH = eH = H =$

$= e_{G/H} \Rightarrow o(xH) \mid n = o(x)$

④ $|G/H| = [G:H]$. Ιδιαίτερα, αν $|G| < \infty$ τότε $[G:H] < \infty$
και τότε $|G/H| = [G:H] = \dfrac{|G|}{|H|}$

⑤ G: κυκλική και $H \trianglelefteq G$ $\Rightarrow G/H$: κυκλική.
Πράγματι, έστω $G = \langle a \rangle$

Ισχυρισμός: $G/H = \langle aH \rangle$. Έστω $xH \in G/H$. Τότε:

$x \in G = \langle a \rangle \Rightarrow x = a^k$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Τότε: $(aH)^k = a^kH = xH \Rightarrow$

NO:
Date:

$G/H = \langle aH \rangle \Rightarrow G/H$: κυκλική

• Το αντίστροφο: G ομάδα, $H \trianglelefteq G$ | G/H: κυκλική $\not\Rightarrow G$: κυκλική. Δηλ. γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει!

πχ $G = S_3$, $H = \langle \rho_1 \rangle \trianglelefteq S_3$ | Η $S_3/\langle \rho_1 \rangle$: κυκλική, διότι έχει τάξη 2 και η S_3 δεν είναι κυκλική.

⑥ G: αβελιανή, $H \leq G$ | $H \trianglelefteq G$ και (G/H): αβελιανή

Πράγματι: $(xH)(yH) = (xy)H = (yx)H = (yH)(xH)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει!

$$\left.\begin{array}{l} G: \text{ομάδα} \\ H \trianglelefteq G \\ G/H: \text{αβελιανή} \end{array}\right\} \not\Rightarrow G: \text{αβελιανή}$$

Υπενθύμιση: Αν G_1, G_2: ομάδες, τότε μια απεικόνιση $f: G_1 \to G_2$ καλείται ομομορφισμός ομάδων αν-ν $\forall\, x,y \in G_1: f(xy) = f(x)f(y)$

⑦ $Ker(f) = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\} \trianglelefteq G_1$ → Πυρήνας του ομομορφισμού f

• Πρόταση: Αν G: ομάδα και $H \trianglelefteq G$, τότε η απεικόνιση $\omega: G \to G/H$, $\omega(x) = xH$, είναι ομομορφισμός ομάδων και $Ker(\omega) = H$

Απόδειξη: $\forall\, x,y \in G: \omega(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \omega(x)\omega(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega$: ομομορφισμός ομάδων

$Ker(\omega) = \{x \in G : \omega(xy) = e_{G/H}\} = \{x \in G \mid xH = eH\} = \{x \in G \mid x \in H\} = H$

NO:
Date:

Παράδειγμα: $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A$: αντιστρέψιμος$\}$

$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid |A| = 1\}$

· Ισχυρισμός: $SL(n,\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n,\mathbb{R})$

$SL(n,\mathbb{R}) \leq GL(n,\mathbb{R})$ διότι: · $I_n \in SL(n,\mathbb{R})$

· $A,B \in SL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow |A| = |B| = 1$

$A\cdot B^{-1} = |A||B^{-1}| = |A|\cdot|B|^{-1} = 1\cdot(1)^{-1} = 1 \Rightarrow A\cdot B^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$

Αν $X \in GL(n,\mathbb{R})$, $A \in SL(n,\mathbb{R})$, τότε για τον πίνακα

$X^{-1}AX$: $|X^{-1}|\,|A|\,|X| = |X^{-1}|\,|A|\,|X| = |A| = 1 \Longrightarrow$

$\Rightarrow X^{-1}AX \in SL(n,\mathbb{R})$

Άρα, $SL(n,\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow$ Ορίζεται η ομάδα-πηλίκο $GL(n,\mathbb{R}) / SL(n,\mathbb{R})$

Έστω $XSL(n,\mathbb{R}) = YSL(n,\mathbb{R}) \Leftrightarrow X^{-1}Y \in SL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\Rightarrow |X^{-1}Y| = 1 \Leftrightarrow |X^{-1}||Y| = 1 \Leftrightarrow |X| = |Y|$

Ορίζουμε μια απεικόνιση $f: GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$

$f(XSL(n,\mathbb{R})) = |X|$

Ισχυρισμός: f ισομορφισμός ομάδων

NO:
Date:

$XSL(n,\mathbb{R}) = YSL(n,\mathbb{R}) \Rightarrow |X| = |Y| \Rightarrow f(XSL(n,\mathbb{R})) = f(YSL(n,\mathbb{R}))$

f: καλά ορισμένη

• $f[(XSL(n,\mathbb{R}) \cdot (YSL(n,\mathbb{R}))] = f((XY)SL(n,\mathbb{R})) = |XY| = |X||Y|$

$= f(XSL(n,\mathbb{R})) \cdot f(YSL(n,\mathbb{R}))$. Άρα f: ομομορφισμός ομάδων

Η f είναι επί διότι: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$: $f(XSL(n,\mathbb{R})) = \alpha$

όπου $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. • Η f: 1-1 διότι $f(XSL(n,\mathbb{R})) = f(YSL(n,\mathbb{R}))$

$\Rightarrow |X| = |Y| \Leftrightarrow XSL(n,\mathbb{R}) = YSL(n,\mathbb{R})$

Συνεπώς, f: ισομορφισμός ομάδων

Παραδείγματα: ① $\{e\} \trianglelefteq G$. Τότε: $G/\{e\} = \{x\{e\} \subseteq G \mid x \in G\}$

$= \{xe = x \in G \mid x \in G\} = G$

$G \trianglelefteq G$. Τότε $G/G = \{G\}$ = τετριμμένη ομάδα με τάξη 1

② $G = S_3$

$H = \langle \rho_1 \rangle \trianglelefteq S_3$. $[S_3 : \langle \rho_1 \rangle] = \dfrac{|S_3|}{|\langle \rho_1 \rangle|} = \dfrac{6}{3} = 2 \Rightarrow |S_3/\langle \rho_1 \rangle| = 2$

$S_3/\langle \rho_1 \rangle = \{\langle \rho_1 \rangle, \sigma_1 \langle \rho_1 \rangle\}$

NO:
Date:

Έστω η απεικόνιση $f: S_3/\langle\rho_1\rangle \to Z_2$

$f: \langle\rho_1\rangle \mapsto [0]_2$ Προφανώς η f: 1-1 και επί

$\sigma_1\langle\rho_1\rangle \mapsto [1]_2$

$f(xy) = f(x)+f(y)$. Έτσι $f((\sigma_1\langle\rho_1\rangle)(\sigma_1\langle\rho_1\rangle)) =$

$= f(\sigma_1^2\langle\rho_1\rangle) = f(i\langle\rho_1\rangle) = f(\langle\rho_1\rangle) = [0]_2$

$f(\sigma_1\langle\rho_1\rangle) + f(\sigma_1\langle\rho_1\rangle) = [1]_2 + [1]_2 = [0]_2$

Άρα f: ομομορφισμός ομάδων

Παρατήρηση: G: ομάδα η οποία έχει μια κανονική υποομάδα H: $|G| = |H| = \infty$ και $|G/H| < \infty$

$G = Z$, $H = nZ$, $n \geq 2$. Τότε $nZ \trianglelefteq Z$ και $Z/nZ \simeq Z_n$ και $|Z_n| = n$

$f: Z/nZ \to Z_n$: $f(x+nZ) = [x]_n$ είναι ισομορφισμός ομάδων

Η f είναι 1-1: $f(x+nZ) = f(y+nZ) \Rightarrow [x]_n = [y]_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x \equiv y \pmod n \Leftrightarrow n \mid x-y \Rightarrow x-y = kn \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y+kn \in y+nZ \Rightarrow x+nZ = y+nZ \Rightarrow$ f: 1-1 κι επί

NO:
Date:

• $f((x+n\mathbb{Z})+(y+n\mathbb{Z})) = f((x+y)+n\mathbb{Z}) = [x+y]_n = [x]_n + [y]_n =$

$= f(x+n\mathbb{Z}) + f(y+n\mathbb{Z})$. Άρα f: ισομορφισμός ομάδων.

f: καλά ορισμένη, διότι: $x+n\mathbb{Z} = y+n\mathbb{Z} \Rightarrow x-y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x-y = nk,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow n \mid x-y \Rightarrow x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]_n = [y]_n \Rightarrow f(x+n\mathbb{Z}) = f(y+n\mathbb{Z})$

② Παράδειγμα άπειρης ομάδας G η οποία περιέχει κανονική υποομάδα H, η οποία είναι άπειρη, έτσι η G/H άπειρη αλλά κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη.

$G = (\mathbb{Q},+)$: αβελιανή, άρα: $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Q} \Rightarrow$ ορίζεται η $\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

$H = (\mathbb{Z},+)$

• <u>Ισχυρισμός</u>: Τα στοιχεία $\{\frac{1}{n}+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$ είναι ανά δύο διαφορετικά.

Έστω ότι έχουμε $n,m \geq 1 : n \neq m$ και

$\frac{1}{n} + \mathbb{Z} = \frac{1}{m} + \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{n=m}$ Άτοπο από υπόθεση $(n \neq m)$

Άρα $\frac{1}{n} + \mathbb{Z} \neq \frac{1}{m} + \mathbb{Z}$

Οπότε $|\mathbb{Q}/\mathbb{Z}| = \infty$

NO:
Date:

Έστω $x+\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, όπου $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{m}{n}$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\underline{n \geq 1}$.

Τότε: $x+\mathbb{Z} = \frac{m}{n} + \mathbb{Z}$

Άρα, $n(x+\mathbb{Z}) = n\left(\frac{m}{n}+\mathbb{Z}\right) = n\frac{m}{n} + \mathbb{Z} = m+\mathbb{Z} =$

$= 0+\mathbb{Z} = \mathbb{Z} = e_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

Συνεπώς, $\underline{o(x+\mathbb{Z}) < \infty}$

③ Παράδειγμα μη-αβελιανής ομάδας G η οποία περιέχει μια μη-αβελιανή κανονική υποομάδα H έτσι ώστε:
$G/H \to$ αβελιανή.

$G = GL(n,\mathbb{R})$ } μη αβελιανές $SL(n,\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n,\mathbb{R})$
$H = SL(n,\mathbb{R})$ } και $GL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^* =$ αβελιανή

• Ταξινόμηση πεπερασμένων απλών ομάδων (1830–1985)

$\mathbb{Z}_p$: p πρώτος (πεπερασμένες απλές αβελιανές ομάδες)

A_n: $n \geq 5$ (Εναλλάσσουσες ομάδες: $A_n \trianglelefteq S_n$)

NO:
Date:

16 οικογένειες ομάδων τύπου Lie

26 σποραδικές ομάδες (οι 20 είναι υποομάδες της μεγαλύτερης πεπερασμένης απλής ομάδας της Monster, τάξης $8 \cdot 10^{53}$)

Πληροφορίες για τη Monster: Είναι πίνακας (196.833×196.833)

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε πεπερασμένη απλή ομάδα διάφορη της Z_p, έχει άρτια τάξη.

<u>Θεωρήματα Ισομορφισμών Ομάδων</u>

Έστω $f: G_1 \to G_2$ είναι ομομορφισμός ομάδων

<u>Πρόταση</u>: Η f καλείται μονομορφισμός $\Longleftrightarrow f$: 1-1

Η f καλείται επιμορφισμός $\Longleftrightarrow f$: επί

Η f καλείται ισομορφισμός $\Longleftrightarrow f$: 1-1 κι επί

· $Ker(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$: πυρήνας του f

· $Im(f) = \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\}$: εικόνα του f

<u>Πρόταση</u>: ① $Ker(f) \trianglelefteq G_1$ και $Im(f) \leq G_2$

② Η f είναι μονομορφισμός $\Longleftrightarrow Ker(f) = \{e_1\}$

③ Η f είναι επιμορφισμός $\Longleftrightarrow Im(f) = \{G_2\}$

NO:
Date:

Απόδειξη: ① Έχουμε δείξει ότι $Ker(f) \trianglelefteq G_1$

$e_2 \in Im(f)$, διότι: $f(e_1) = e_2$

Αν $z, \omega \in Im(f)$, τότε: $\left.\begin{matrix} z = f(x) \\ \omega = f(y) \end{matrix}\right\}$ για $x, y \in G_1$

Τότε $z\omega = f(x)f(y) = f(xy) \in Im(f)$

Αν $z \in Im(f)$, τότε $z = f(x)$, $x \in G_1$ και τότε:

$z^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in Im(f)$. Άρα $Im(f) \leq G_2$

② "⇒" Έστω ότι f: μονομορφισμός ⇒ f: 1-1. Έστω ότι:

$x \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = e_2 = f(e_1) \xrightarrow{f:1-1} x = e_1 \Rightarrow Ker(f) \subseteq \{e_1\}$

$\Rightarrow Ker(f) = \{e_1\}$

"⇐" Έστω ότι $Ker(f) = \{e_1\}$ κι έστω ότι $f(x) = f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)f(y)^{-1} = e_2 \Rightarrow f(x)f(y^{-1}) = e_2 \Rightarrow f(xy^{-1}) = e_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy^{-1} \in Ker(f) = \{e_1\} \Rightarrow xy^{-1} = e \Rightarrow \underline{x = y}$

Άρα, η f είναι 1-1.

③ Προφανές (λολ!)

NO:
Date:

- **1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων:** Έστω $f: G_1 \to G_2$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε, η απεικόνιση:

$\bar{f}: G_1/Ker(f) \to Im(f)$, $\bar{f}(xKer(f)) = f(x)$ είναι ισομορφισμός ομάδων:

$$G_1/Ker(f) \simeq Im(f)$$

Απόδειξη: ① Έστω ότι: $xKer(f) = yKer(f) \iff$

$\iff x^{-1}y \in Ker(f) \Rightarrow f(x^{-1}y) = e_2 \Rightarrow f(x^{-1})f(y) = e_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)^{-1}f(y) = e_2 \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow \bar{f}(yKer(f)) = \bar{f}(xKer(f))$

Άρα $\bar{f}$: καλά ορισμένη

② $\bar{f}[(xKer(f))(yKer(f))] = \bar{f}((xy)Ker(f)) = f(xy) = f(x)f(y)$

$= \bar{f}(xKer(f))\bar{f}(yKer(f))$. Άρα $\bar{f}$: ομομορφισμός ομάδων

③ Έστω ότι $xKer(f) \in Ker(\bar{f}) = \bar{f}(xKer(f)) = e_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = e_2 \Rightarrow x \in Ker(f) \Rightarrow xKer(f) = Ker(f) =$

$= e_{G_1/Ker(f)} \Rightarrow \bar{f}$: μονομορφισμός

④ $\bar{f}$: επί, διότι $\forall z \in Im(f) \Rightarrow \exists x \in G_1 : f(x) = z \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{f}(xKer(f)) = f(x) = z$.

Άρα $\bar{f}$: ισομορφισμός

NO:
Date:

Πόρισμα: Αν $f: G_1 \to G_2$ είναι επιμορφισμός ομάδων τότε: $G_1/\ker f \simeq G_2$

3ο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων: Έστω G: ομάδα και έστω H και K κανονικές υποομάδες της G: $H \trianglelefteq G$ και $K \trianglelefteq G$. Αν $K \leq H$, τότε $K \trianglelefteq H$, η ομάδα H/K είναι κανονική υποομάδα της G/K και

$G/K / H/K \simeq G/H$

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση $f: G/K \longrightarrow G/H$

$f(xK) = (xH)$

① Η f είναι καλά ορισμένη, διότι: $xK = yK \Rightarrow$
$\Rightarrow x^{-1}y \in K \leq H \Rightarrow x^{-1}y \in H$. $xH = yH \Rightarrow f(yK) = f(xK)$

② $f(xK)(yK) = f((xy)K) = (xy)H = xHyH = f(xK)f(yK)$
$\Rightarrow f$: ομομορφισμός

③ Η f είναι επί, διότι $\forall\, yH \in G/H : f(yK) = yH$

$\ker(f) = \{xK \in G/K \mid f(xK) = e_{G/H}\} = \{xK \in G/K \mid xH = H\}$
$= \{xK \in G/K \mid x \in H\} = H/K \trianglelefteq G/K$

$\{ G/K / H/K \Rightarrow G/H \leadsto$ 1ο Θ. Ισ. για την $f \}$